

ԴԻՆԱՄԻԿ ԳՈՐԾՈՆԱՅԻՆ ՍՈԴԵԼՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ԲԱՅԵՍՅԱՆ ԵՎ ԿԱԼՄԱՆ-ՖԻԼՏՐԻ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՀՀ ՄԱԿՐՈՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ՑՈՒՑԱՆԻՇՆԵՐԻ ԿԱՐԳԱԺԱՄԿԵՏ ԿԱՆԽԱՏԵՍՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Տնտեսական հետազոտությունների վարչություն

Կ. Պողոսյան

Ներածություն

Վերջին տարիներին մակրոտնտեսական ցուցանիշների դինամիկան մոդելավորելու և կանխատեսելու համար գործնականում լայն տարածում են ստացել դինամիկ գործոնային մոդելները (Dynamic Factor Model (DFM)): Այդ մոդելները անվանվում են դինամիկ, քանի որ դրանց մեջ ներառվում են կախյալ փոփոխականի լագային արժեքները, և գործոնային, քանի որ նախնական բացատրող փոփոխականները փոխարինվում են ավելի քիչ քանակի գործոններով (կամ գլխավոր բաղադրատարրերով): Դինամիկ գործոնային մոդելների (այսուհետ՝ DFM) կառուցման գործընթացը բաղկացած է երկու փուլերից: Առաջին փուլի ընթացքում նախնական փոփոխականների հիման վրա գնահատվում են գլխավոր բաղադրատարրերի դինամիկաները: Դրա համար գործնականում ընդունված է կիրառել ստատիկ (J. Stock, M. Watson (2002)) և դինամիկ (M. Forni, M. Hallin, M. Lippi, L. Reichlin (2003)) գլխավոր բաղադրատարրերի եղանակները: Նշենք, որ ստատիկ և դինամիկ գործոնային վերլուծության եղանակների օգնությամբ իրականացվել են ՀՀ եռամսյակային ՀՆԱ-ի իրական աճի և գնաճի փոփոխման միտումների կանխատեսումները: Այդ վերլուծության մեթոդաբանությունը, ինչպես նաև կանխատեսման արդյունքները մանրամասն ներկայացվել են «ՀՀ կենտրոնական բանկի բանբեր» պարբերականում (Կ. Պողոսյան, Ա. Սկրտչյան, (2009, 2-րդ եռ.) և Կ. Պողոսյան, Ա. Սկրտչյան (2010, 2-րդ եռ.):

Ինչպես վերը նշվեց, DFM մոդելի կառուցման առաջին փուլը ենթադրում է նախնական փոփոխականների հիման վրա գլխավոր բաղադրատարրերի դինամիկաների գնահատումը:

Երկրորդ փուլի ընթացքում իրականացվում է DFM մոդելների ընտրությունը և անհայտ պարամետրերի գնահատումը: Նշենք, որ DFM մոդելների պարամետրերի գնահատման համար ավանդականը նվազագույն քառակուսիների եղանակն է (OLS), իսկ մոդելի ընտրությունը հիմնվում է ճշգրտված դետերմինացիայի գործակցի վրա (R-squared adjusted): Համաձայն այդ եղանակի՝ կանխատեսման համար ընտրվում է այն մոդելը, որի ճշգրտված դետերմինացիայի գործակիցը (R-squared adjusted) համեմատաբար մեծ է:

Մյուս կողմից, վերջին տարիների ընթացքում ռեգրեսիոն մոդելների ընտրության և պարամետրերի գնահատման մեթոդաբանությունը բավականին զարգացել է, և որպես հետևանք, ներկայումս գոյություն ունեն մոդելների ընտրության և պարամետրերի գնահատման համեմատաբար առավել արդյունավետ ալգորիթմներ: Սույն աշխատանքում հիմնական ուշադրությունը կենտրոնացնում ենք վերջին տարիներին մշակված մոդելների ընտրության և պարամետրերի գնահատման Բայեսյան եղանակի վրա: Ընդհանուր առմամբ, Բայեսյան ընտրության և գնահատման ալգորիթմի էությունը հանգում է հետևյալին. դրա օգնությամբ գնահատվում են յուրաքանչյուր մոդելի ճիշտ լինելու ճշգրտված հավանականությունները (posterior probabilities), որոնք իրենց հերթին կիրառվում են մեկ միասնական մոդելի ընտրության և պարամետրերի գնահատման համար: Այդ միասնական մոդելի պարամետրերը հաշվարկվում են որպես տարբեր մոդելների պարամետրերի կշռված միջին թվաբանական մեծություններ: Մոդելի ընտրության և պարամետրերի գնահատման Բայեսյան եղանակի դիտարկման արդյունքների մանրամասները կներկայացվեն հետագա բաժիններում:

* Հեղինակների տեսակետները կարող են չհամընկնել ՀՀ կենտրոնական բանկի պաշտոնական դիրքորոշմանը:

Չետազոտության կառուցվածքը: Առաջին բաժնում ներկայացվում է դինամիկ գործոնային մոդելի ընդհանուր տեսքը և թե ինչպես կարելի է Բայեսյան գնահատման եղանակը կիրառել այդ դասի մոդելների նկատմամբ: Հաջորդ բաժնում մանրամասն ներկայացվում է պարամետրերի գնահատման Բայեսյան ալգորիթը, ընդ որում՝ մանրամասն ներկայացվում են պարամետրերի գնահատման և մոդելի ընտրության բանաձևերի դուրսբերումները: Երրորդ բաժնում ներկայացվում են կանխատեսման այլընտրանքային եղանակները, մասնավորապես՝ առանց սահմանափակման VAR (UVAR), Բայեսյան VAR (BVAR) և այսպես կոչված State-space DFM մոդելները: Չորրորդ բաժնում ներկայացվում են ՀՀ եռամսյակային իրական ՀՆԱ-ի և գնաճի դինամիկաների կանխատեսման համար կիրառված փաստացի մակրոտնտեսական ժամանակային շարքերը և դրանց համառոտ բնութագրերը: Այս նույն բաժնում նաև ներկայացվում է, թե ինչպիսի ծրագրային փաթեթներ են կիրառվել հաշվարկների և կանխատեսումների իրականացման համար: Հինգերորդ բաժնում ներկայացվում են ՀՀ եռամսյակային իրական ՀՆԱ-ի և գնաճի դինամիկաների կանխատեսման արդյունքները: Վերջում կատարվում են եզրակացություններ և առաջարկություններ՝ հետազոտության արդյունքները ՀՀ մակրոտնտեսական ցուցանիշների կարճաժամկետ կանխատեսումներում կիրառելու վերաբերյալ:

1. Դինամիկ գործոնային մոդել

Վերջին տարիներին մակրոտնտեսական վերլուծությունների և կանխատեսումների համար բավականին լայն տարածում են ստացել դինամիկ գործոնային մոդելները: Այդ մոդելները հիմնականում կիրառվում են այն դեպքում, երբ բացատրող փոփոխականների քանակը համեմատաբար շատ է: Բացատրող փոփոխականների մեծ քանակի դեպքում ավանդական ռեգրեսիոն վերլուծությունը գործնականում կիրառելի չէ, մասնավորապես՝ խնդիրներ են առաջանում պարամետրերի գնահատման հետ և, որպես կանոն, գնահատված պարամետրերի արժեքները լինում են զրոյի հավասար, կամ էականորեն չեն տարբերվում զրոյից (G. Koop, Potter (2003)): Այդ խնդիրը լուծելու համար գործնականում առաջարկվում է կիրառել գլխավոր բաղադրատարրերի կամ գործոնային վերլուծության եղանակները: Դրանք հնարավորություն են տալիս նախնական փոփոխականների հիման վրա կառուցել ավելի քիչ քանակի նոր, միմյանց հետ չկոռելացված փոփոխականներ, որոնք իրենց հերթին բացատրում են նախնական փոփոխականների ցրվածքի (դիսպերսիայի) մեծ մասը: Այսպիսով՝ դինամիկ գործոնային մոդելներում նախնական փոփոխականները փոխարինվում են ավելի քիչ քանակի գլխավոր բաղադրատարրերով կամ գործոններով: Ունենալով գնահատված գլխավոր բաղադրատարրերը՝ DFM մոդելը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ (Schumacher, C., (2005)).

$$y_{t+h} = \alpha(L)y_t + \beta\hat{F}_t + \varepsilon_{t+h} \quad (1)$$

որտեղ՝ y_t -ն կախյալ փոփոխականի արժեքներն են, $\hat{F}_t$ -ն գնահատված գլխավոր բաղադրատարրերի արժեքներն են, L -ը լազային օպերատորն է, β -ն և α -ն ռեգրեսիոն մոդելի անհայտ պարամետրերի վեկտորն է, որոնց գնահատումը, որպես կանոն, իրականացվում է ավանդական՝ նվազագույն քառակուսիների եղանակի օգնությամբ՝ $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$:

Սույն աշխատանքում, ի տարբերություն ավանդական գնահատման մոտեցմանը, անհայտ պարամետրերի գնահատումը իրականացնում ենք Բայեսյան եղանակի օգնությամբ: Որպեսզի պարզ դառնա Բայեսյան եղանակի ընդհանուր գաղափարը և գործնական կիրառումը՝ դիտարկենք հետևյալ պայմանական երկգործոնային DFM մոդելը (J.R. Magnus et al. (2010)):

$$y_{t+1} = \alpha y_t + \beta_1 f_{1t} + \beta_2 f_{2t} + \varepsilon_{t+1} \quad (2)$$

Այս մոդելը դինամիկ է, քանի որ պարունակում է կախյալ փոփոխականի լազային արժեքը և, բացի այդ, գործոնային է, քանի որ մոդելում ընդգրկված են նախնական բացատրող փոփոխականների հիման վրա գնահատված երկու գլխավոր բաղադրատարրեր՝ f_{1t} և f_{2t} : Մոդել (2)-ի մեկ այլ կարևոր առանձնահատկությունը այն է, որ մենք ցանկանում ենք, որպեսզի կախյալ փոփոխականի լազային արժեքը միշտ ներառված լինի մոդելում, իսկ f_{1t} և f_{2t} գլխավոր բաղադրատարրերը կարող են ներառվել կամ էլ կարող են չներառվել մոդելում: Այլ կերպ ասած, ունենք անորոշություն՝ մոդելի ճիշտ սպեցիֆիկացիայի վերաբերյալ: Այս տեսանկյունից կարող ենք ունենալ մոդել (2)-ի սպեցիֆիկացիայի չորս հնարավոր տարբերակներ, մասնավորապես.

$$y_{t+1} = \alpha y_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$y_{t+1} = \alpha y_t + \beta_1 f_{1t} + \varepsilon_{t+1}$$

$$y_{t+1} = \alpha y_t + \beta_2 f_{2t} + \varepsilon_{t+1}$$

$$y_{t+1} = \alpha y_t + \beta_1 f_{1t} + \beta_2 f_{2t} + \varepsilon_{t+1}$$

Հարց է առաջանում. ո՞ր մոդելը ընտրել կախյալ փոփոխականի դինամիկան բացատրելու և կանխատեսելու համար: Այս առումով Բայեսյան եղանակը առաջարկում է բավականին հետաքրքիր լուծում:

Համաձայն Բայեսյան մեթոդաբանության՝ ի սկզբանե (a priori) բոլոր մոդելների սպեցիֆիկացիաները ճիշտ են, այլ կերպ ասած՝ բոլոր մոդելները հավասարաչափ լավ են: Հետևաբար մոդել (2)-ի բոլոր հնարավոր սպեցիֆիկացիաները ունեն նույն արժեքը և յուրաքանչյուր մոդելի ճիշտ լինելու հավանականությունը կազմում է $p(M(i)) = 1/4$: Կիրառելով փաստացի ժամանակային շարքերը՝ հնարավոր է i-րդ մոդելի համար հաշվարկել հավանականությունների բաշխման առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիան, մասնավորապես՝ $p(y|M(i))$: Մյուս կողմից, ունենալով i-րդ մոդելի ճիշտ լինելու հավանականությունների բաշխման սկզբնական արժեքները $p(M(i))$, ինչպես նաև ունենալով i-րդ մոդելի համար հաշվարկված հավանականությունների բաշխման առավելագույն ճշմարտանմանության $p(y|M(i))$ արժեքները՝ հնարավոր է Բայեսի կանոնի օգնությամբ գնահատել i-րդ մոդելի ճիշտ լինելու ճշգրտված հավանականությունների բաշխման արժեքները՝ $p(M(i)|y)$: Նշենք, որ Բայեսյան գնահատման առավել բարդ հատվածը i-րդ մոդելի հավանականությունների բաշխման առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիայի գնահատումն է: Այդ խնդրին մանրամասն կանդիդատներ սույն աշխատանքի հաջորդ բաժնում, իսկ այստեղ բերենք մի պարզագույն օրինակ, որը հնարավորություն կտա հասկանալու և պատկերացում կազմելու Բայեսյան եղանակով DFM մոդելի պարամետրերի գնահատման ալգորիթմի վերաբերյալ:

Ենթադրենք՝ հաշվարկների արդյունքում ստացվել է, որ i-րդ մոդելի հավանականությունների բաշխման առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիան ունի հետևյալ արժեքները.

$$p(y|M(1)) = 0.01, \quad p(y|M(2)) = 0.05, \quad p(y|M(3)) = 0.04, \quad p(y|M(4)) = 0.02$$

Կիրառելով Բայեսի կանոնը՝ կարող ենք հաշվարկել i-րդ մոդելի ճիշտ լինելու ճշգրտված հավանականությունների արժեքները: Մեր օրինակի համար ճշգրտված հավանականությունների արժեքները հավասար կլինեն.

$$p(M(1)|y) = 0.01 \times 0.25 / (0.25 \times (0.01 + 0.05 + 0.04 + 0.02)) = 0.08$$

$$p(M(2)|y) = 0.05 \times 0.25 / (0.25 \times (0.01 + 0.05 + 0.04 + 0.02)) = 0.42$$

$$p(M(3)|y) = 0.04 \times 0.25 / (0.25 \times (0.01 + 0.05 + 0.04 + 0.02)) = 0.33$$

$$p(M(4)|y) = 0.02 \times 0.25 / (0.25 \times (0.01 + 0.05 + 0.04 + 0.02)) = 0.18$$

Այնուհետև հաշվարկված արժեքները կիրառվում են միասնական մոդելի պարամետրերը ճշգրտելու համար: Դա իրականացվում է հետևյալ պարզագույն սխեմայի օգնությամբ:

$$y_{t+1} = 0.08\alpha y_t + \varepsilon_{t+1}^1$$

$$y_{t+1} = 0.42\alpha y_t + 0.42\beta_1 f_{1t} + \varepsilon_{t+1}^2$$

$$y_{t+1} = 0.33\alpha y_t + 0.33\beta_2 f_{2t} + \varepsilon_{t+1}^3$$

$$y_{t+1} = 0.18\alpha y_t + 0.18\beta_1 f_{1t} + 0.18\beta_2 f_{2t} + \varepsilon_{t+1}^4$$

Միջինացման արդյունքում ստանում ենք հետևյալ միասնական մոդելը.

$$y_{t+1} = \alpha y_t + (0.42 + 0.18)\beta_1 f_{1t} + (0.33 + 0.18)\beta_2 f_{2t} + u_{t+1}$$

Ներկայացված եղանակը ընդունված է անվանել մոդելի Բայեսյան միջինացման եղանակ (BMA (Bayesian model averaging)): Այսպիսով՝ մոդել (2)-ի համար Բայեսյան եղանակը հնարավորություն է տալիս միաժամանակ լուծելու երկու կարևոր խնդիր. իրականացնել լավագույն մոդելի ընտրություն և գնահատել մոդելի անհայտ պարամետրերի արժեքները: Այժմ ավելի մանրամասն ներկայացնենք, թե ինչպես է BMA եղանակի օգնությամբ իրականացվում DFM մոդելի ընտրությունը և պարամետրերի գնահատումը ընդհանուր դեպքի համար:

2. DFM մոդելի գնահատման Բայեսյան եղանակը

Ինչպես տեսանք նախորդ բաժնում, Բայեսյան եղանակը կարելի է կիրառել երկու կարևոր խնդիր լուծելու համար: Մանրամասն ներկայացնենք, թե ինչպես կարելի է լուծել այդ երկու փոխկապված խնդիրները, իսկ այնուհետև կանդադարենք դրանց գործնական կիրառման առանձնահատկություններին: Պատկերացնենք, որ մոդել (2)-ում երկու գլխավոր բաղադրատարրերի փոխարեն ունենք k հատ գլխավոր բաղադրատարրեր, հետևաբար կարող ենք ունենալ ընդամենը 2^k մոդելների հնարավոր տարբերակներ: Այդ բոլոր մոդելները մեզ համար ունեն հավասար կարևորություն, այսինքն՝ դրանք բոլորն էլ ճիշտ են սպեցիֆիկացված: Քանակապես յուրաքանչյուր մոդելի ճիշտ լինելու սկզբնական հավանականությունը կարելի է ներկայացնել որպես $p(M_i) = \frac{1}{2^k}$, որտեղ $p(M_i)$ -ը i -րդ մոդելի ճիշտ լինելու հավանականությունն է: Ինչպես տեսնում ենք, բոլոր հնարավոր մոդելների ճիշտ լինելու հավանականությունները հավասար են միմյանց ($1/2^k$): Բայց, որպեսզի գնահատենք յուրաքանչյուր մոդելի ճիշտ լինելու ճշգրտված (posterior) հավանականությունների արժեքները, անհրաժեշտ է գնահատել յուրաքանչյուր մոդելի առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիան: i -րդ մոդելի առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիան նշանակենք $p(y | M_i)$: Ունենալով $p(y | M_i)$ ֆունկցիայի արժեքները և կիրառելով Բայեսի թեորեմը՝ i -րդ մոդելի ճիշտ լինելու ճշգրտված հավանականությունը հաշվարկվում է հետևյալ կերպ.

$$p(M_i | y) = cp(y | M_i)p(M_i) \quad (3)$$

որտեղ c -ն հաստատուն մեծություն է և ընդունում է միևնույն արժեքը բոլոր մոդելների համար: Այսպիսով տեսնում ենք, i -րդ մոդելի ճշգրտված հավանականությունների հաշվարկը ունի բավականին պարզ տեսք, բայց i -րդ մոդելի առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիայի գնահատումը բավականին բարդությունների հետ է կապված: Այժմ ներկայացնենք i -րդ մոդելի առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիայի գնահատման առանձնահատկությունները: Դրա համար նախ մոդել (2)-ը ներկայացնենք ընդհանրացված տեսքով.

$$y_{t+1} = \alpha y_t + \beta_1 f_{1t} + \beta_2 f_{2t} + \dots + \beta_k f_{kt} + \varepsilon_t \quad (4)$$

Կատարենք նշանակումներ՝ $y_t = [y_2, y_3, \dots, y_{t+1}]$, $X_1 = [y_1, y_2, \dots, y_t]$, $X_2 = [f_{1t}, f_{2t}, \dots, f_{kt}]$: Հետևաբար մոդել (4)-ը կարելի է ներկայացնել նաև որպես.

$$y_t = X_1 \alpha + X_2 \beta + \varepsilon_t \quad (5)$$

Ինչպես տեսնում ենք, մոդել (5)-ը պարունակում է երկու տիպի փոփոխականներ, առաջին տիպի փոփոխականները միշտ ընդգրկվում են մոդելում, իսկ երկրորդ տիպի փոփոխականները կարող են ընդգրկվել կամ էլ կարող են չընդգրկվել մոդելում: Այսինքն՝ բոլոր հնարավոր մոդելների քանակը կախված է X_2 վեկտորի մեջ մտնող գլխավոր բաղադրատարրերի քանակից: Օրինակ՝ եթե գլխավոր բաղադրատարրերի քանակը կազմում է k , ապա բոլոր հնարավոր մոդելների քանակը կլինի 2: i -րդ մոդելի ճիշտ լինելու ճշգրտված հավանականությունը ըստ Բայեսի թեորեմի կարելի է հաշվարկել հետևյալ բանաձևով (J.R. Magnus et al. (2010)).

$$p(M_i | y) = \left(\frac{g_i}{1 + g_i} \right)^{k_{2i}/2} (y' M_1 A_i M_1 y)^{-(n-k_1)/2}$$

$$\text{որտեղ } M_1 = I_n - X_1(X_1' X_1)^{-1} X_1',$$

$$A_i = \frac{g_i}{1 + g_i} M_1 + \frac{1}{1 + g_i} (M_1 - M_1 X_{2i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1), \quad g_i := \frac{1}{\max(n, k_2^2)}$$

Այսպիսով՝ $(p(M_i | y))$ հավանականությունների արժեքները գնահատելու համար բոլոր անհրաժեշտ տարրերը մեզ հայտնի են: Ըստ էության, $(p(M_i | y))$ մեծությունը հիմնականում պայմանավորվում է A_i և k_{2i} արժեքներով: Վերջին երկու տարրերը իրենց հերթին պայմանավորվում են այն հանգամանքով, թե i -րդ մոդելում X_2 վեկտորի որ համադրությունն է քննարկվում: Հաշվարկված $(p(M_i | y))$ հավանականությունները կիրառվում են որպես կշիռներ՝ մոդելի պարամետրերը և դրանց ստանդարտ շեղումները հաշվարկելու համար:

$$b_1 = \sum_i p(M_i | y) b_{1i}$$

$$\text{var}(b_1) = \sum_i p(M_i | y) (V_{1i}^* + b_{1i} b_{1i}') - b_1 b_1'$$

$$b_2 = \sum_i p(M_i | y) T_i b_{2i}$$

$$\text{var}(b_2) = \sum_i p(M_i | y) T_i (V_{2i}^* + b_{2i} b_{2i}') T_i' - b_2 b_2'$$

որտեղ՝

$$b_{1i} = (X_1' X_1)^{-1} X_1' (y - X_{2i} b_{2i})$$

$$b_{2i} = \frac{1}{1 + g_i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 y$$

$$V_{1i}^* = s_i^2 (X_1' X_1)^{-1} + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_{2i} V_{2i}^* X_{2i}' X_1 (X_1' X_1)^{-1}$$

$$V_{2i}^* = \frac{s_i^2}{1 + g_i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1}$$

Նշված բանաձևերի դուրսբերումները և դրանց հետ կապված բոլոր մեկնաբանությունները ներկայացված են հավելված 1-ում:

Այսպիսով ներկայացրեցինք այն բանաձևերը, որոնց օգնությամբ իրականացվում է մոդել (1)-ի ընտրությունը և պարամետրերի գնահատումը՝ համաձայն Բայեսյան մեթոդաբանության: Բացի Բայեսյան ալգորիթմից, դիտարկենք նաև երեք այլընտրանքային կանխատեսման մոդելներ, մասնավորապես՝ VAR, BVAR և State-space DFM մոդելները: Նախ՝ անդրադառնանք կանխատեսման ավանդական եղանակների էությանը, այնուհետև՝ կանխատեսման արդյունքների համեմատական վերլուծությանը:

3. Կանխատեսման այլընտրանքային մոդելներ (VAR, BVAR, State-space (Kalman filter) DFM)

Բացահայտելու համար, թե որքանով են լավ կամ վատ DFM մոդելներով իրականացված կանխատեսումները, անհրաժեշտություն է առաջանում համեմատություններ կատարելու այլ հայտնի եղանակներով իրականացված կանխատեսման արդյունքների հետ: Պրա համար կիրառել ենք նաև մի քանի հայտնի այլընտրանքային կանխատեսման եղանակներ, մասնավորապես՝ ավանդական, առանց սահմանափակումների VAR (unrestricted vector autoregression), BVAR (Bayesian vector autoregression) և State-space DFM եղանակները: Առաջին հերթին ներկայացնենք ավանդական VAR մոդելի էությունը և դրանով կանխատեսումների իրականացման մեխանիզմը: Ինչպես հայտնի է, առաջին կարգի VAR մոդելը ներկայացվում է $y_t = A y_{t-1} + \varepsilon_t$, որտեղ y_t -ն ներծին փոփոխականների վեկտորն է, A-ն նվազագույն քառակուսիների եղանակով գնահատված անհայտ պարամետրերի մատրիցն է, իսկ ε_t -ն միմյանց հետ չկոռելացված սխալների վեկտորն է: VAR մոդելի միջոցով կանխատեսումները գեներացվում են բավականին պարզ տրամաբանությամբ, մասնավորապես՝ $\hat{y}_{t+1} = A y_t$, $\hat{y}_{t+2} = A \hat{y}_{t+1}$, ..., $\hat{y}_{t+k} = A \hat{y}_{t+k-1}$:

BVAR մոդելի միջոցով կանխատեսումները իրականացվում են այս նույն շղթայական տեղադրումների միջոցով, միայն այն տարբերությամբ, որ պարամետրերի մատրիցը գնահատվում է էականապես այլ ալգորիթմի օգնությամբ: VAR մոդելի պարամետրերի Բայեսյան գնահատման անդրադառնալուց առաջ նպատակահարմար է նախ ուսումնասիրել պարզագույն գծային ռեգրեսիոն հավասարման պարամետրերի գնահատման Բայեսյան մեթոդաբանությունը: Ըստ էության, հասկանալով գծային ռեգրեսիայի պարամետրերի գնահատման Բայեսյան մեթոդաբանությունը, այն կարելի է ընդհանրացնել հավասարումների համակարգի, մասնավորապես՝ VAR համակարգի համար:

Դիցուք, ունենք հետևյալ բազմակի ռեգրեսիոն հավասարումը. $y_t = X\beta + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, X-ը ռեգրեսիոն հավասարման բացատրող փոփոխականների մատրիցն է $(T \times k)$, իսկ β -ն ռեգրեսիոն հավասարման պարամետրերի վեկտորն է $(k \times 1)$: Ենթադրենք՝ β պարամետրերի վեկտորի բաշխման վերաբերյալ հայտնի է որոշակի տեղեկույթ, մասնավորապես՝ հայտնի են բաշխման բնութագրիչները, և, հետևաբար, հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը. $p(\beta) \propto \exp[-(\beta - m)' H^{-1} (\beta - m) / 2]$. Ռեգրեսիոն հավասարման պարամետրերի առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիան կարելի է

ներկայացնել հետևյալ կերպ. $p(y|\beta, h, X) \propto \exp[-h(y - X\beta)'(y - X\beta)/2]$, որտեղ $h = 1/\sigma^2$: Ունենալով ռեգրեսիոն հավասարման պարամետրերի հավանականությունների բաշխման նախնական ֆունկցիան, ինչպես նաև այդ պարամետրերի հավանականությունների բաշխման առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիան՝ հնարավոր է գնահատել պարամետրերի հավանականությունների բաշխման ճշգրտված ֆունկցիան: Կիրառելով Բայեսի կանոնը՝ ռեգրեսիոն հավասարման պարամետրերի հավանականությունների բաշխման ճշգրտված ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը.

$$p(\beta|y, X, h) \propto p(y|\beta, X, h)p(\beta) \propto \exp[-(\beta - m)'H^{-1}(\beta - m)/2] \exp[-h(y - X\beta)'(y - X\beta)/2] = \\ \exp\{-(\beta - m)'H^{-1}(\beta - m) + h(y - X\beta)'(y - X\beta)/2\}$$

Այսպիսով՝ $\exp\{-(\beta - m)'H^{-1}(\beta - m) + h(y - X\beta)'(y - X\beta)/2\}$ ֆունկցիան ռեգրեսիոն հավասարման պարամետրերի հավանականությունների բաշխման խտության ճշգրտված ֆունկցիան է: Հաշվարկենք այդ բաշխման բնութագրիչները: Դրա համար անհրաժեշտ է իրականացնել $\exp\{-(\beta - m)'H^{-1}(\beta - m) + h(y - X\beta)'(y - X\beta)/2\}$ ֆունկցիայի լրիվ քառակուսու առանձնացում: Հավելված 2-ում ներկայացված է վերոնշյալ ֆունկցիայի լրիվ քառակուսու առանձնացման ալգորիթմը:

Հավելված 2-ից կարելի է նկատել, որ պարամետրերի Բայեսյան գնահատականը հավասար է $\beta^* = (H^{-1} + h(X'X))^{-1}(H^{-1}m + hX'y)$: Մյուս կողմից՝ այդ գնահատականը միայն մեկ հավասարման համար է նախատեսված: Այն դեպքում, երբ ցանկանում ենք հաշվարկել պարամետրերի Բայեսյան գնահատականները ռեգրեսիոն հավասարումների համակարգի համար, ապա մեկ առանձին հավասարման համար հաշվարկած արդյունքը որոշակի փոփոխություններով տարածում ենք հավասարումների համակարգի վրա: Տվյալ դեպքում Բայեսյան գնահատականը կլինի $\beta^* = (H^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes X_t'X_t)^{-1}(H^{-1}\tilde{b}_0 + \Sigma^{-1} \otimes X_t'X_t\hat{b})$: Այսպիսով, ինչպես տեսնում ենք, էական տարբերություններ չկան, պարզապես մեկ հավասարման համար դուրս բերված բանաձևը տարածում ենք հավասարումների համակարգի վրա: Դրա համար էլ կիրառել ենք $(\otimes)$ Կրոնեկերի արտադրյալի նշանը:

Այժմ ներկայացնենք, թե ինչպես են ստացվում $\tilde{b}_0$ վելտորը և H մատրիցի նախնական արժեքները (prior values): Որպեսզի հասկանալի լինի այդ նախնական արժեքների ընտրության տրամաբանությունը՝ անդրադառնանք հետևյալ VAR պրոցեսի ուսումնասիրությանը: Դիտարկենք պարզագույն BVAR(1) մոդելը, որը ունի հետևյալ բացված տեսքը.

$$y_t = c_1 + b_{11}y_{t-1} + b_{12}x_{t-1} + v_{1,t} \\ x_t = c_2 + b_{21}y_{t-1} + b_{22}x_{t-1} + v_{2,t}$$

Նախ նշենք, որ գործնականում $\tilde{b}_0$ -ն և H -ը որոշվում են տարբեր եղանակների միջոցով, բայց առավել տարածում է ստացել, այսպես կոչված՝ Մինետտա կամ Լիտերմանի եղանակը: VAR պրոցեսի պարամետրերի նախնական արժեքները ընտրվում են հետևյալ տրամաբանությամբ. ըստ Լիտերմանի՝ VAR մոդելում կախյալ փոփոխականի լագային արժեքները հետևում են AR պրոցեսին, դրա համար մեր օրինակի համար ունենք $\tilde{b}_0 = (c_1, b_{11}, b_{12}, c_2, b_{21}, b_{22})$, հետևաբար, ըստ Լիտերմանի, պարամետրերի նախնական արժեքները կլինեն $\tilde{b}_0 = (0, 1, 0, 0, 0, 1)$: Ինչ վերաբերում է VAR պրոցեսի պարամետրերի ստանդարտ շեղումների նախնական արժեքների ընտրությանը, ապա, կրկին ըստ Լիտերմանի, դրանք առաջարկվում է հաշվարկել հետևյալ կերպ.

$$\left(\frac{\lambda_i}{l^{\lambda_3}}\right)^2, i = j, \left(\frac{\sigma_i \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_j l^{\lambda_3}}\right)^2, i \neq j, (\sigma_1 \lambda_4)^2$$

Նշենք, որ ըստ Լիտերմանի H մատրիցի արժեքները կառուցվում են այնպես, որ մեծ լագային արժեքների դեպքում $b_{ij} \rightarrow 0$ ($i = j$) կամ ($i \neq j$): Այլ կերպ ասած՝ ըստ Լիտերմանի, տվյալ փոփոխականի տատանողականությունը բացատրելու համար առավել կարևոր նշանակություն ունի իր առաջին լագի պարամետրի արժեքը, այնուհետև, ըստ հերթականության՝ երկրորդ լագի պարամետրը, և այդպես շարունակ: Ինչ վերաբերում է մյուս փոփոխականների լագային արժեքներին, ապա դրանք նույնպես լագային արժեքի մեծացման հետ միաժամանակ մոտենում են զրոյի: Գործնականում առաջարկվում են $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ և λ_4 մեծությունների հետևյալ արժեքները, մասնավորապես՝ $\lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 10^5$: Ինչպես

տեսնում ենք, եթե $l \rightarrow \infty$, ապա $b_{ij} \rightarrow 0$ ($i = j$) կամ ($i \neq j$): Քանի որ $\lambda_4 \cdot 10^5$, ապա ռեգրեսիոն հավասարումների համակարգի հաստատուն պարամետրի արժեքը մոտ կլինի առավելագույն ճշմարտանմանության եղանակով գնահատված արժեքին:

Այսպիսով՝ մեր օրինակի համար H մատրիցի նախնական արժեքները կլինեն.

$$H = \begin{bmatrix} (\sigma_1 \lambda_4)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sigma_1 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_2} \right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sigma_2 \lambda_4)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\sigma_2 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_1} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1)^2 \end{bmatrix}$$

Նույն տրամաբանությամբ կարելի է ստանալ $BVAR(2), \dots, BVAR(p)$ մոդելների պարամետրերի նախնական արժեքները:

Այժմ ներկայացնենք State-space DFM մոդելի գնահատման և կանխատեսման ալգորիթը: Նշենք, որ DFM մոդելը State-space տեսքով կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ (Otter, Jacobs (2008)).

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= AF_t + w_{t+1} \\ x_t &= BF_t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Հայտնի է, որ State-space մոդելների մեջ ներառված չդիտարկվող տարրի գնահատումը և կանխատեսումը իրականացվում է Կալման-ֆիլտրի միջոցով: Բայց այն դեպքում, երբ DFM մոդելը ներկայացվում է State-space տեսքով, ապա Կալման-ֆիլտրի կիրառումը իրականացվում է որոշակի տարբերություններով: State-space DFM մոդելի դեպքում չդիտարկվող տարրը նույնպես F_t մատրիցն է, սակայն ի տարբերություն ավանդական Կալման-ֆիլտրի չդիտարկվող տարրի, տվյալ դեպքում չդիտարկվող տարրը գործոններն են կամ գլխավոր բաղադրատարրերը, որոնք, ինչպես հայտնի է, x_t նախնական փոփոխականների մատրիցի հիման վրա հաշվարկված գծային համակցություններ: Մյուս կողմից, հայտնի է, որ գլխավոր բաղադրատարրերի հաշվարկը իրականացվում է սկզբնական մատրիցի սեփական արմատների և սեփական վեկտորների միջոցով ((Կ. Պողոսյան, Ա. Մկրտչյան, 2009 (2-րդ եռ.) և Կ. Պողոսյան, Ա. Մկրտչյան (2010, 2-րդ եռ.)): Ուստի State-space DFM մոդելի F_t չդիտարկվող տարրը հնարավոր չէ գնահատել ավանդական Կալման-ֆիլտրի ալգորիթով: Գործնականում մինչ Կալման-ֆիլտրի կիրառումը, անհրաժեշտ է գնահատել F_t չդիտարկվող տարրի դիմամիկան՝ հիմնվելով x_t նախնական փոփոխականների մատրիցի սեփական արմատների և սեփական վեկտորների վրա: Դրա համար, հետևելով (Otter, Jacobs (2008)) կողմից առաջարկված ալգորիթին, x_t նախնական ժամանակային շարքերի մատրիցը տրոհում ենք երկու մասի: Առաջին մասը կիրառվում է F_t չդիտարկվող տարրի սկզբնական $F_{1|0}$ և $V_{F(1|0)}$ արժեքների գնահատման համար: F_t չդիտարկվող տարրի երկրորդ մասը գնահատվում է հիմնվելով ավանդական Կալման-ֆիլտրի ալգորիթի վրա, ընդ որում, այստեղ որպես սկզբնական պայմաններ կիրառվում են $F_{1|0}$ և $V_{F(1|0)}$ արժեքները: F_t չդիտարկվող տարրի (գլխավոր բաղադրատարրերի), ինչպես նաև x_t նախնական ժամանակային շարքերի ապագայի h քայլ կանխատեսելու համար կիրառվում են Կալման-ֆիլտրով գնահատված $F_{t|t}$ չդիտարկվող տարրի արժեքները ժամանակի t պահի համար: Այսպիսով՝ վերոնշյալը թույլ է տալիս եզրակացնել, որ, ի տարբերություն ավանդական Կալման-ֆիլտրի, State-space DFM մոդելի դեպքում Կալման-ֆիլտրի սկզբնական պայմանները գնահատվում են՝ հիմնվելով x_t նախնական շարքերի մատրիցի վրա:

Այժմ դիտարկենք, թե ինչպես են գնահատվում F_t չդիտարկվող տարրի $F_{1|0}$ և $V_{F(1|0)}$ սկզբնական արժեքները: Ինչպես նշվել է, x_t նախնական ժամանակային շարքերի մատրիցը տրոհում ենք երկու մասի, այնուհետև առաջին մասը կիրառում ենք F_t չդիտարկվող տարրի գնահատման համար: F_t չդիտարկվող տարրի դիմամիկան ստանալու համար կիրառվում է գծային հանրահաշվում հայտնի SVD (Singular Value Decomposition) տրոհման ալգորիթը: Դիցուք, ունենք նախնական տվյալների x_t ($T \times N$) մատրիցը: Կիրառելով SVD եղանակը՝ հնարավոր է X մատրիցը տրոհել այնպիսի բաղադրատարրերի, որ տեղի ունենա հետևյալ նույնությունը. $x_t = USC'$, $UU' = U'U = I_T$, $CC' = C'C = I_N$, $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_N)$, $s_1 > s_2 > \dots > s_N$:

Այնուհետև, ինչպես և ստանդարտ գործոնային վերլուծության մեջ, ընտրվում են առաջին մի քանի սեփական արմատները, այնպես, որ $k_m < k_n$: Հետևաբար կարող ենք գրել հետևյալ նույնությունը, մասնավորապես.

$$X = U_m S_m C'_m + U_{n-m} S_{n-m} C'_{n-m} = \hat{X} + E$$

$$\hat{X}' = C'_m S_m [\hat{F}_1 \dots \hat{F}_m]$$

Ունենալով վերոնշյալ մատրիցների սկզբնական արժեքները՝ կարող ենք կիրառել Կալման-ֆիլտրի ավանդական ալգորիթմը, որը ունի հետևյալ հաշվողական հաջորդականությունը.

$$\varepsilon_t = x_t - BF_{t|t-1}$$

$$D_t = BV_{F_{t|t-1}} B' + R$$

$$F_{t|t} = F_{t|t-1} + V_{F_{t|t-1}} B' D_t^{-1} \varepsilon_t$$

$$V_{F_{t|t}} = V_{F_{t|t-1}} - V_{F_{t|t-1}} B' D_t^{-1} B V_{F_{t|t-1}}$$

$$K_t = (A V_{F_{t|t-1}} B' + G) D_t^{-1}$$

$$F_{t+1|t} = B F_{t|t-1} + K_t \varepsilon_t$$

$$V_{F_{t+1|t}} = A V_{F_{t|t-1}} A' - K_t D_t K_t'$$

Ապագայի h քայլով կանխատեսումները իրականացվում են հետևյալ կերպ.

$$F_{t+h|t} = A^h F_{t|t}$$

$$x_{t+h|t} = B F_{t+h|t}$$

Այսպիսով՝ դիտարկեցինք այլընտրանքային կանխատեսման եղանակների համառոտ ալգորիթմը և դրանց կիրառման առանձնահատկությունները: Այժմ անդրադառնանք այդ եղանակներով ստացված կանխատեսումների արդյունքներին:

4. Վերլուծության թվային բազան և ծրագրային ապահովումը

ՀՀ հիմնական մակրոտնտեսական ցուցանիշների կանխատեսման համար օգտագործել ենք 2000–2010 թթ. փաստացի եռամսյակային մակրոտնտեսական ցուցանիշների ժամանակային շարքերը: Ընդհանուր առմամբ, վերլուծության մեջ ընդգրկել ենք մակրոտնտեսական ցուցանիշների 42 ժամանակային շարքեր: Այդ ժամանակային շարքերը ներկայացնում են տնտեսության տարբեր ոլորտները, մասնավորապես՝ իրական հատվածը, դրամավարկային և ֆինանսական հատվածները, միջազգային հատվածը բնութագրող ցուցանիշներ (տես հավելված 3): Այդ ժամանակային շարքերը ենթարկվել են նախնական վիճակագրական վերամշակման՝ դրանք լոգարիթմվել են, այն շարքերը, որոնք ունեն սեզոնայնություն, ենթարկվել են սեզոնային հարթեցման և այնուհետև առաջին կարգի դիֆերենցման: Կիրառելով վերամշակված ժամանակային շարքերը՝ գնահատվել են գլխավոր բաղադրատարրերի դինամիկաները: Սույն աշխատանքում գլխավոր բաղադրատարրերի դինամիկաների գնահատման համար կիրառվել է գլխավոր բաղադրատարրերի վերլուծության ստատիկ եղանակը (J. Stock և M. Watson (2002)): Այսինքն, հիմնվելով նախնական փոփոխականների կոռելյացիոն մատրիցի վրա, գնահատվում են այդ մատրիցի սեփական արմատները և սեփական վեկտորները, որից հետո սեփական վեկտորների օգնությամբ գնահատվում են գլխավոր բաղադրատարրերի դինամիկաները: Գնահատված գլխավոր բաղադրատարրերի քանակը, որպես կանոն, համեմատաբար ավելի քիչ է, քան նախնական փոփոխականների քանակը: Գործնականում գնահատված գլխավոր բաղադրատարրերի քանակը պետք է լինի այնքան, որպեսզի դրանք բացատրեն նախնական փոփոխականների ցրվածքի (դիսպերսիայի) շուրջ 75-80%-ը: Գնահատված գլխավոր բաղադրատարրերի դինամիկաները օգտագործվում են մոդել (1)-ի պարամետրերը գնահատելու համար: Պարամետրերի գնահատումը իրականացվում է վերոնշյալ եղանակների օգնությամբ, մասնավորապես՝ BMA, VAR, BVAR, Sspace եղանակով: Վերջապես, գնահատված DFM մոդելները կիրառվում են ՀՀ հիմնական մակրոտնտեսական ցուցանիշների կարճաժամկետ (հիմնականում՝ մինչև 1 տարի ժամկետով) կանխատեսումների իրականացման նպատակով: Նշենք, որ տարբեր եղանակներով DFM մոդելների գնահատումը և կանխատեսումը հետապնդում է այն նպատակը, որ բացահայտվի, թե ՀՀ հիմնական մակրոտնտեսական ցուցանիշների կարճաժամկետ կանխատեսման համար որ եղանակն է ավելի նպատակահարմար կիրառել: Դրա համար իրականացնում ենք տարբեր եղանակներով ստացված կանխատեսումների համեմատական վերլուծություն:

Սույն հետազոտական աշխատանքի մեկ այլ կարևոր առանձնահատկությունը այն է, որ կատարված բոլոր հաշվարկների և կանխատեսումների համար MATLAB միջավայրում ստեղծվել են հատուկ ծրագրա-

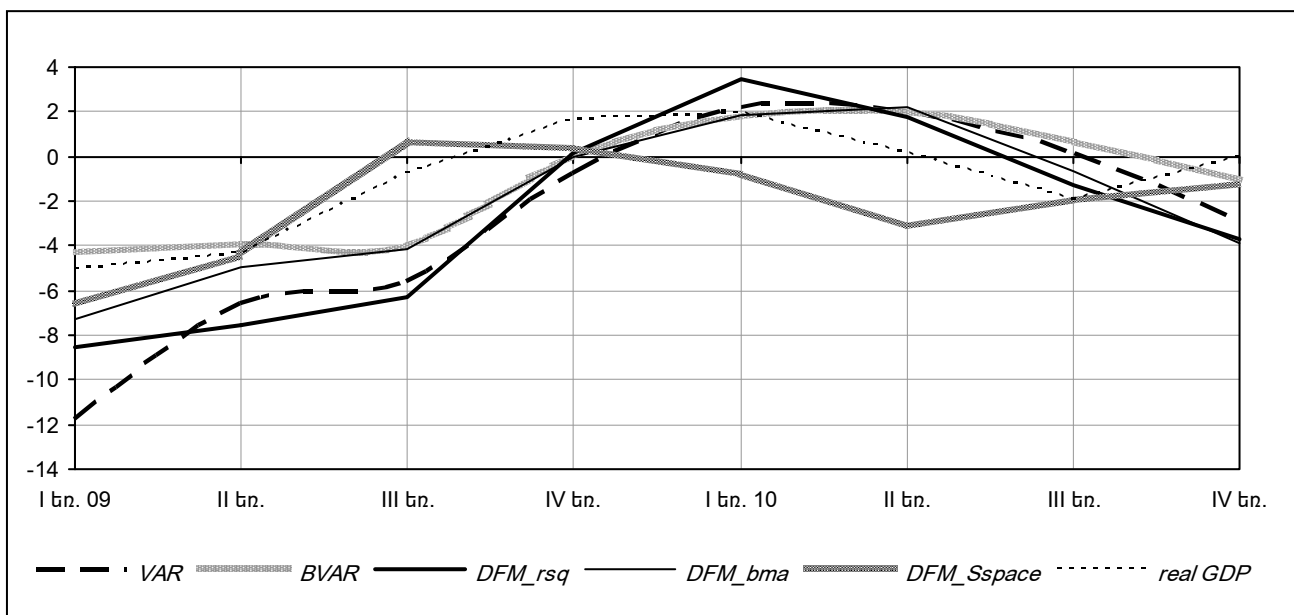
յին ֆայլեր: Դա հնարավորություն է տալիս կատարելու հետևյալ գործողությունները. գնահատել գլխավոր բաղադրատարրերի դինամիկաները, իրականացնել ռեգրեսիոն հավասարման պարամետրերի Բայեսյան գնահատումը և այն կիրառել կանխատեսումների համար: Բացի Բայեսյան գնահատականներից, այն հնարավորություն է տալիս նաև իրականացնելու լավագույն մոդելի ընտրությունը՝ ըստ ճշգրտված դետերմինացիայի գործակցի: Ընդ որում, մոդելի գնահատումները, ինչպես նշվել է, կարելի է իրականացնել տարբեր լազերի համար, իսկ կանխատեսումները՝ տարբեր ժամանակային հորիզոնների կտրվածքով: Սույն աշխատանքի մեկ այլ կարևոր առանձնահատկությունը այն է, որ ստեղծվել է ծրագրային ապահովման ինտերֆեյս, որը համեմատաբար պարզեցնում է կանխատեսման գործընթացը: Դրա իմաստն այն է, որ մոդելների պարամետրերի գնահատումը և ժամանակային շարքերի կանխատեսումները ամբողջությամբ իրականացվում են MATLAB փաթեթի միջավայրում, իսկ հաշվարկների և կանխատեսումների արդյունքները արտացոլվում են ավանդական Excel ծրագրի միջավայրում: Այժմ անդրադառնանք կանխատեսման արդյունքներին:

5. Կարճաժամկետ կանխատեսման համեմատական վերլուծությունը

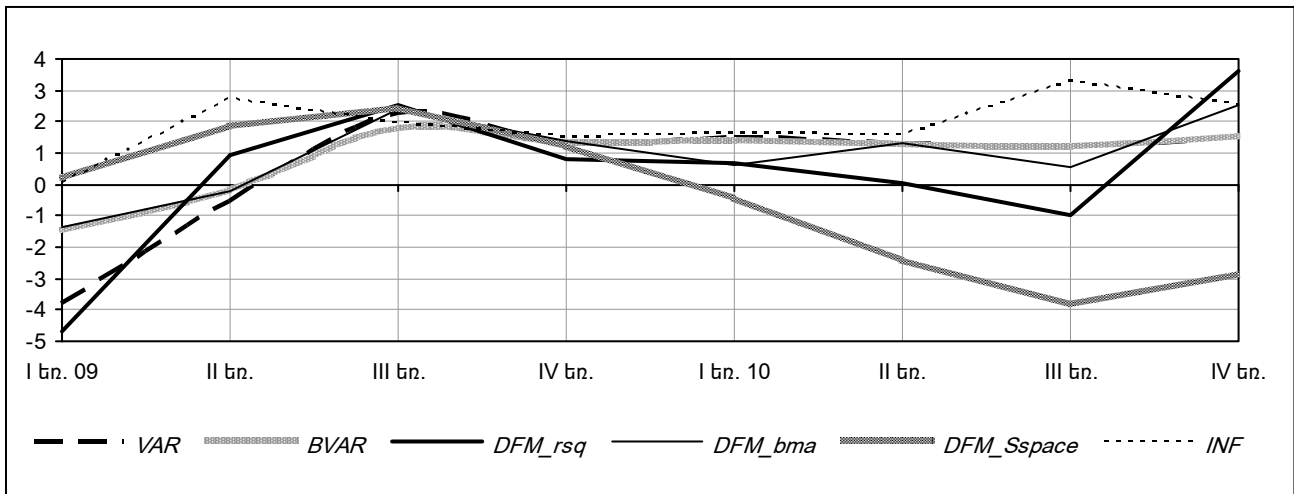
ՀՀ եռամսյակային իրական ՀՆԱ-ի և գնաճի դինամիկաների կանխատեսումները իրականացվել են հետևյալ սկզբունքներով: Նախ՝ ամբողջ ընտրանքը բաժանվել է երկու մասի, առաջին մասը օգտագործվել է մոդելների պարամետրերը գնահատելու համար, իսկ երկրորդ մասը կիրառվել է մոդելի կանխատեսման ճշտությունը ստուգելու համար: Այլ կերպ ասած՝ իրականացվել են պատմական շարքերի կանխատեսումներ և դրանք համակցվել են ժամանակային շարքերի փաստացի արժեքների հետ (ex-post forecasts): Կանխատեսումների համար կիրառվել են VAR, BVAR և DFM մոդելները: DFM մոդելի ընտրությունը և պարամետրերի գնահատումը իրականացվել է R_adj, BMA, Sspace DFM մոդելների օգնությամբ: Կանխատեսման մեկ այլ կարևոր առանձնահատկությունը այն է, որ կանխատեսումները իրականացվել են տարբեր լազերի համար և յուրաքանչյուր պահին ժամանակային շարքին ավելացվել են տվյալ պահին առկա փաստացի արժեքները և մոդելների պարամետրերը, ինչպես նաև կանխատեսումները ենթարկվել են ճշգրտման: Այսպիսով՝ կիրառելով վերոնշյալ սկզբունքները, իրականացվել են ՀՀ եռամսյակային իրական ՀՆԱ-ի և գնաճի կանխատեսումները: Եռամսյակային իրական ՀՆԱ-ի և գնաճի տարբեր եղանակներով իրականացված կանխատեսման և փաստացի արժեքների դինամիկաների համադրումները ներկայացված են գծանկարներ 1 - 2-ում:

Գծանկար 1

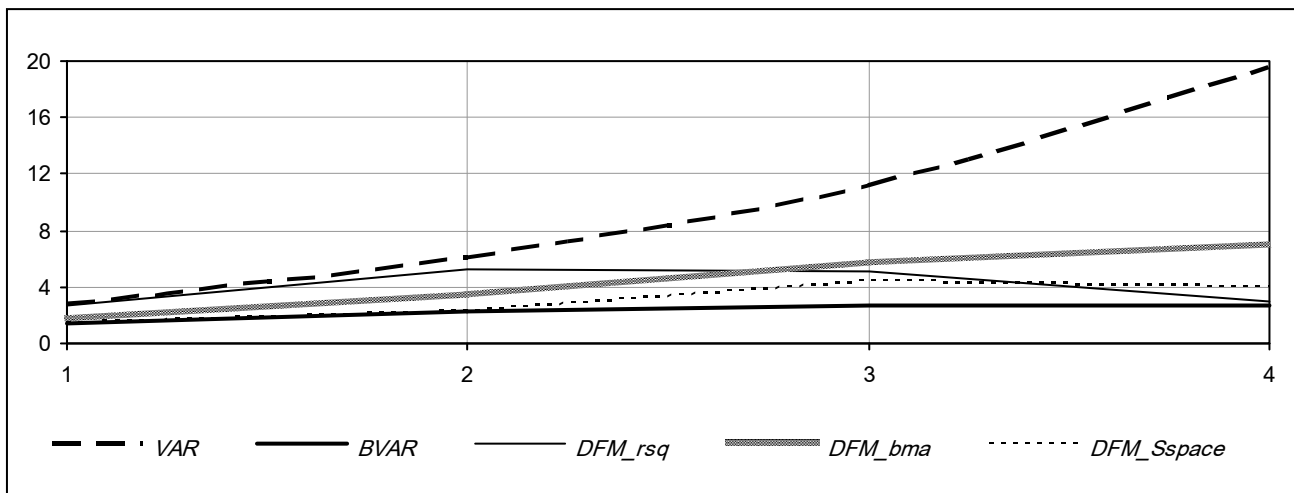
Իրական ՀՆԱ-ի փաստացի և կանխատեսված դինամիկաները
(%-ով՝ նախորդ եռամսյակի նկատմամբ)



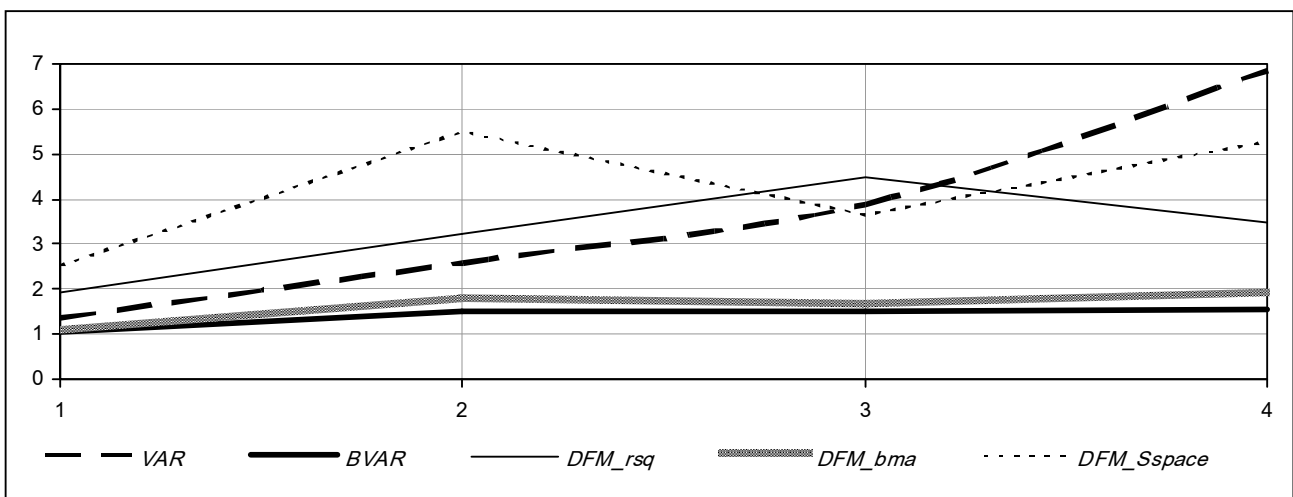
ՀՀ գնաձի փաստացի և կանխատեսված դինամիկաները
(%-ով՝ նախորդ եռամսյակի նկատմամբ)



Իրական ՀՆԱ-ի տարրեր լագերով կանխատեսված արժեքների համար
հաշվարկված RMSE գործակիցները



Գնաձի տարրեր լագերով կանխատեսված արժեքների համար
հաշվարկված RMSE գործակիցները



Ինչպես տեսնում ենք գծանկարներից, Բայեսյան եղանակով գնահատված DFM մոդելը, ինչպես նաև BVAR մոդելը համեմատաբար ավելի ճշգրիտ կանխատեսման արդյունքներ են տալիս, քան ավանդական եղանակով գնահատված մոդելները: Դրա մասին են վկայում գծանկարներ 3-4-ում ներկայացված RMSE (Root mean squared error) գործակիցները: Նշենք, որ RMSE գործակիցը ցույց է տալիս կանխատեսված և փաստացի ժամանակային շարքերի տարբերությունների քառակուսիների գումարը: Այսինքն՝ որքան այդ ցուցանիշը մոտ լինի զրոյի, այնքան տվյալ կանխատեսման եղանակը ավելի արդյունավետ կլինի կիրառել կարճաժամկետ կանխատեսումների համար: Ինչպես տեսնում ենք գծանկարներ 3 և 4-ից, որքան կանխատեսման լազը մեծանում է, այնքան ավանդական եղանակներով կանխատեսումները վատանում են, այլ կերպ ասած՝ դրանց RMSE գործակիցը մեծանում է: Այսպիսով՝ RMSE գործակիցների հիման վրա եզրակացնում ենք, որ ՀՀ հիմնական մակրոտնտեսական ցուցանիշների կարճաժամկետ կանխատեսման համար առավել արդյունավետ է կիրառել Բայեսյան եղանակով գնահատված DFM կամ այլընտրանքային BVAR և Sspace_DFM մոդելները:

Եզրակացություններ

Այսպիսով՝ կատարված հետազոտությունը հնարավորություն է տալիս հանգել այն եզրակացության, որ DFM մոդելների գնահատման Բայեսյան եղանակը հնարավորություն է տալիս բարելավելու կանխատեսումների ճշգրտությունը: Հաշվարկները ցույց են տալիս, որ Բայեսյան DFM և Բայեսյան VAR եղանակների միջոցով ստացված կանխատեսումները ավելի մոտ են փաստացի ժամանակային շարքերի արժեքներին, քան կանխատեսման ավանդական եղանակներով ստացված արդյունքները (VAR): Այդ եղանակները հնարավորություն են տալիս լավացնելու կանխատեսման արդյունքները հիմնականում կարճաժամկետ կանխատեսման հորիզոնի համար: Հիմնական եզրակացությունը այն է, որ դրամավարկային քաղաքականության եռամսյակային կանխատեսումային մոդելի սկզբնական արժեքների կանխատեսումները առաջարկվում է այսուհետ իրականացնել Բայեսյան DFM (BDFM) կամ Բայեսյան VAR (BVAR) մոդելների օգնությամբ: Հաշվարկների համար առաջարկում ենք կիրառել մեր կողմից ստեղծված MATLAB և Excel(VBA) ինտերֆեյսային ծրագիրը:

Գրականություն

1. Կ. Պողոսյան, Ա. Սկրտչյան (2009). ՀՀ եռամսյակային իրական ՀՆԱ-ի և գնաճի կարճաժամկետ կանխատեսման դինամիկ գործոնային մոդելները. «ՀՀ կենտրոնական բանկի բանբեր» #2.
2. Կ. Պողոսյան, Ա. Սկրտչյան (2010). ՀՀ մակրոտնտեսական ցուցանիշների եռամսյակային կանխատեսման դինամիկ գործոնային մոդելների համեմատական վերլուծությունը. «ՀՀ կենտրոնական բանկի բանբեր» #2.
3. Forni, M., Hallin, M., Lippi, M., Reichlin, L. (2003). The generalized Dynamic Factor Model: One-sided estimation and forecasting, mimeo.
4. Kadiyala, K. Rao and Sune Karlsson, 1997. Numerical methods for estimation and inference in Bayesian VAR models, Journal of applied econometrics 12(2), 99-132.
5. Koop, G., and S. Potter (2003). "Forecasting in large macroeconomic panels using Bayesian model averaging", manuscript (University of Leicester).
6. Litterman, R. (1986). Forecasting with Bayesian vector autoregressions – five years of experience, Journal of business and economic statistics, 4, 25-38.
7. Magnus J.R., Powell., Prufer 2009. A comparison of two model averaging techniques with an application to growth empirics.
8. Hamilton, J.D., 1994. Time series analysis, Princeton University Press, Princeton.
9. Sims, Cristopher and Tao Zha, 1998. Bayesian methods for dynamic multivariate models, International Economic Review 39(4), 949-968.
10. Schumacher, C., (2005). Forecasting German GDP using alternative factor models based on large dataset. Discussion paper, Series 1: Economic Studies, No 24/2005.
11. Stock, J. H. and Watson, M. W., 2002. "Macroeconomic Forecasting Using Diffusion Indexes". Journal of Business and Economic Statistics, 20, 147-162.
12. Zellner, A., 1986. On assessing prior distributions and Bayesian regression analysis with g-prior distributions. In Goel, P.K., Zellner, A. (Eds.), Bayesian inference and decision techniques: Essays in Honor of Bruno de Finetti. North-Holland. Amsterdam, pp. 233-243.

Բայեսյան եղանակով ռեգրեսիոն մոդելի պարամետրերը գնահատելու համար անհրաժեշտ է իմանալ գնահատվող պարամետրի հավանականությունների խտության ֆունկցիայի սկզբնական բաշխումը (prior distribution) և առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիան (likelihood function): Համաձայն Բայեսի կանոնի պարամետրի ճշգրտված (posterior) գնահատականը ստանում ենք որպես սկզբնական բաշխման և առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիայի արտադրյալ: Այսպիսով՝ կիրառելով այդ սկզբունքը, փորձենք հաշվարկել $y_i = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon_i$ մոդելի պարամետրերը:

Պարամետրերի առավելագույն ճշմարտանմանության ֆունկցիան ներկայացվում է ավանդական նորմալ բաշխման խտության ֆունկցիայի միջոցով, մասնավորապես (J.R. Magnus, Powell O., Pru'fer P., (2010))՝

$$p(y | \beta_1, \beta_2, \sigma^2, M_i) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp - \frac{S_i}{2\sigma^2}, \text{ որտեղ}$$

$$S_i = (y - X_1\beta_1 - X_2\beta_2)'(y - X_1\beta_1 - X_2\beta_2)$$

Պարամետրերի սկզբնական բաշխումը նույնպես ներկայացվում է ավանդական նորմալ բաշխման հավանականությունների խտության ֆունկցիայի միջոցով, մասնավորապես՝

$$p(\beta_1, \beta_2, \sigma^2 | M_i) \propto (\sigma^2)^{-(d_0+k_1+k_2+2)/2} \times \exp - \left(\frac{h_0\beta_1'\beta_1 + \beta_2'V_{0i}^{-1}\beta_2 + a_0}{2\sigma^2} \right)$$

Համաձայն Բայեսի կանոնի՝ ճշգրտված պարամետրերի բաշխման բնութագրիչները գնահատվում են հետևյալ կերպ.

$$p(\beta_1, \beta_2, \sigma^2 | y, M_i) \propto p(y | \beta_1, \beta_2, \sigma^2, M_i) p(\beta_1, \beta_2, \sigma^2 | M_i)$$

$$p(\beta_1, \beta_2, \sigma^2 | y, M_i) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp - \frac{S_i}{2\sigma^2} (\sigma^2)^{-(d_0+k_1+k_2+2)/2} \times \exp - \left(\frac{h_0\beta_1'\beta_1 + \beta_2'V_{0i}^{-1}\beta_2 + a_0}{2\sigma^2} \right) S_i - \text{ի}$$

$$\Rightarrow (\sigma^2)^{-(d+k_1+k_2+2)/2} \exp - \frac{S_i + h_0\beta_1'\beta_1 + \beta_2'V_{0i}^{-1}\beta_2 + a_0}{2\sigma^2}$$

փոխարեն տեղադրենք $S_i = (y - X_1\beta_1 - X_2\beta_2)'(y - X_1\beta_1 - X_2\beta_2)$ և կատարենք համապատասխան մաթեմատիկական ձևափոխություններ: Արդյունքում ստանում ենք հետևյալ նույնությունները.

$$\begin{aligned} S_i + h_0\beta_1'\beta_1 + \beta_2'V_{0i}^{-1}\beta_2 + a_0 &= (y - X_1\beta_1 - X_2\beta_2)'(y - X_1\beta_1 - X_2\beta_2) + h_0\beta_1'\beta_1 + \\ \beta_2'V_{0i}^{-1}\beta_2 + a_0 &= y'y - y'(X_1\beta_1) - y'(X_2\beta_2) - y'(X_1\beta_1) + \beta_1'X_1'X_1\beta_1 + (X_1\beta_1)'(X_2\beta_2) - \\ y'(X_2\beta_2) &+ (X_1\beta_1)'(X_2\beta_2) + \beta_2'X_2'X_2\beta_2 + h_0\beta_1'\beta_1 + \beta_2'V_{0i}^{-1}\beta_2 + a_0 = \\ y'y - 2y'(X_1\beta_1) - 2y'(X_2\beta_2) &+ (X_1\beta_1)'(X_2\beta_2) + 2(X_1\beta_1)'(X_2\beta_2) + \\ \beta_2'X_2'X_2\beta_2 + h_0\beta_1'\beta_1 + \beta_2'V_{0i}^{-1}\beta_2 + a_0 &+ y'(X_1 : X_2)V_i(X_1 : X_2)'y - \\ y'(X_1 : X_2)V_i(X_1 : X_2)'y; \end{aligned}$$

Վերջին արտահայտությունը մատրիցի տեսքով կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$\begin{pmatrix} \beta_1 - b_{1i} \\ \beta_2 - b_{2i} \end{pmatrix}' V_i^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 - b_{1i} \\ \beta_2 - b_{2i} \end{pmatrix} + a_i,$$

$$\text{որտեղ } V_i^{-1} = \begin{pmatrix} X_1'X_1 + h_0I_{k_1} & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 + V_{0i}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \end{pmatrix} = V_i(X_1 : X_2)'y,$$

$$a_i = a_0 + y'y - y'(X_1 : X_2)V_i(X_1 : X_2)'y :$$

Այժմ հաշվարկենք V_i^{-1} մատրիցի հակադարձ մատրիցի անդամները: Նախ նշենք, որ V_i^{-1} մատրիցը բլոկներից կազմված մատրից է, և հետևաբար հակադարձ մատրիցի հաշվարկման ալգորիթմը տարբերվում է սովորական մատրիցների հակադարձման ալգորիթմներից: Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ եթե ունենք $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ բլոկ-մատրից, ապա դրա հակադարձը կլինի.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}C_2^{-1} \\ -C_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & C_2^{-1} \end{bmatrix},$$

որտեղ՝ $C_1 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $C_2 = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$: Այսպիսով, տեղադրելով V_i^{-1} մատրիցի անդամները համապատասխան անդամների փոխարեն, ստանում ենք V_i մատրիցը, մասնավորապես՝ այդ մատրիցի անդամները կլինեն.

$$\begin{aligned} C_2 &= A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = (X'_{2i}X_{2i} + V_{0i}^{-1}) - X'_{2i}X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1X_{2i} = \\ &V_{0i}^{-1} + X'_{2i}(I - X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1)X_{2i} = V_{0i}^{-1} + X'_{2i}M_1^*X_{2i} = V_{2i}^{-1}; \\ C_1^{-1} &= (X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1} + (X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1X_{2i}V_{2i}X'_{2i}X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1} = \\ &= (X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1} + Q_iV_{2i}Q_i'; \\ -A_{11}^{-1}A_{12}C_2^{-1} &= -(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1X_{2i}V_{2i} = -Q_iV_{2i} \\ -C_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} &= -V_{2i}X'_{2i}X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1} = -V_{2i}Q_i'; \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$V_i = \begin{bmatrix} (X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1} + Q_iV_{2i}Q_i' & -Q_iV_{2i} \\ -V_{2i}Q_i' & V_{2i} \end{bmatrix}$$

Կիրառելով V_i մատրիցը՝ կարելի է հաշվարկել հետևյալ նույնությունը.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1 & X_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1} + Q_iV_{2i}Q_i' & -Q_iV_{2i} \\ -V_{2i}Q_i' & V_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_{2i} \end{bmatrix} &= \\ X_1((X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1} + Q_iV_{2i}Q_i')X'_1 - X_{2i}V_{2i}Q_i'X'_1 - X_1Q_iV_{2i}X'_{2i} + X_{2i}V_{2i}X'_{2i} &= \\ X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1 + X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1X_{2i}V_{2i}X'_{2i}X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1 - \\ X_{2i}V_{2i}X'_{2i}X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1 - X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1X_{2i}V_{2i}X'_{2i} + X_{2i}V_{2i}X'_{2i} &= \\ I - I + X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1 + X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1X_{2i}V_{2i}X'_{2i}X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1 - \\ X_{2i}V_{2i}X'_{2i}X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1 - X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1X_{2i}V_{2i}X'_{2i} + X_{2i}V_{2i}X'_{2i} &= \\ I - M_1^* - M_1^*X_{2i}V_{2i}X'_{2i}X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1 + M_1^*X_{2i}V_{2i}X'_{2i} &= \\ I - M_1^* + M_1^*X_{2i}V_{2i}X'_{2i} - M_1^*X_{2i}V_{2i}X'_{2i}X_1(X'_1X_1 + h_0I_{k1})^{-1}X'_1 &= \\ I - M_1^* + M_1^*X_{2i}V_{2i}X'_{2i}M_1^* & \end{aligned}$$

Ստանում ենք, որ.

$$(X_1 : X_{2i})V_i(X_1 : X_{2i})' = I - M_1^* + M_1^*X_{2i}V_{2i}X'_{2i}M_1^*$$

Հետևաբար a_i մեծության համար կունենանք հետևյալ նույնությունը.

$$\begin{aligned} a_i &= a_0 + y'y - y'(X_1 : X_{2i})V_i(X_1 : X_{2i})'y = a_0 + y'y - y'(I - M_1^* + \\ &M_1^*X_{2i}V_{2i}X'_{2i}M_1^*)y = a_0 + y'y - y'y + y'(M_1^* - M_1^*X_{2i}V_{2i}X'_{2i}M_1^*)y = \\ &a_0 + y'(M_1^* - M_1^*X_{2i}V_{2i}X'_{2i}M_1^*)y; \end{aligned}$$

Պարզության համար ենթադրենք, որ $h_0 = 0$, $a_0 = 0$ և $d_0 = -k$: Հետևաբար M_1^* կլինի համարժեք $M_1 = I - X_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1$:

$$a_i = y'A_iy, \quad A_i = M_1 - M_1X_{2i}V_{2i}X'_{2i}M_1$$

a_i -ը կարելի է ներկայացնել նաև որպես $a_i = y'M_1A_iM_1y$, ինչը համարժեք է $a_i = y'A_iy$: Հեշտությամբ կարող ենք ցույց տալ այդ նույնությունը.

$$\begin{aligned} a_i &= y'M_1A_iM_1y = y'M_1(M_1 - M_1X_{2i}V_{2i}X'_{2i}M_1)M_1y = y'M_1M_1M_1y - \\ &y'M_1M_1X_{2i}V_{2i}X'_{2i}M_1M_1y = y'M_1y - y'M_1X_{2i}V_{2i}X'_{2i}M_1y = y'A_iy \end{aligned}$$

Այժմ կարող ենք գնահատել պարամետրերի Բայեսյան գնահատականները.

$$\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \end{pmatrix} = V_i(X_1 : X_{2i})' y = \begin{bmatrix} (X_1' X_1 + h_0 I_{k_1})^{-1} + Q_i V_{2i} Q_i' & -Q_i V_{2i} \\ -V_{2i} Q_i' & V_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_{2i}' \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} ((X_1' X_1 + h_0 I_{k_1})^{-1} + Q_i V_{2i} Q_i') X_1' - Q_i V_{2i} X_{2i}' \\ -V_{2i} Q_i' X_1' + V_{2i} X_{2i}' \end{bmatrix} y$$

Այժմ լուծենք առանձին - առանձին.

$$\begin{aligned} b_{1i} &= \left[((X_1' X_1)^{-1} + Q_i V_{2i} Q_i') X_1' - Q_i V_{2i} X_{2i}' \right] y = \begin{bmatrix} (X_1' X_1)^{-1} X_1' + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_{2i} V_{2i} X_{2i}' X_1' \\ (X_1' X_1)^{-1} X_1' - (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_{2i} V_{2i} X_{2i}' \end{bmatrix} y = \\ &= ((X_1' X_1)^{-1} X_1' - (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_{2i} V_{2i} X_{2i}' (I - X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1')) y = \\ &= ((X_1' X_1)^{-1} X_1' - (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_{2i} V_{2i} X_{2i}' M_1) y = ((X_1' X_1)^{-1} X_1' (I - X_{2i} V_{2i} X_{2i}' M_1) y = \\ &= ((X_1' X_1)^{-1} X_1' (y - X_{2i} V_{2i} X_{2i}' M_1 y) = (X_1' X_1)^{-1} X_1' (y - X_{2i} b_{2i}) \\ b_{2i} &= (-V_{2i} Q_i' X_1' + V_{2i} X_{2i}') y = V_{2i} (X_{2i}' - Q_i' X_1') y = V_{2i} (X_{2i}' - X_{2i}' X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1') y = \\ &= V_{2i} X_{2i}' M_1 y = (V_{0i}^{-1} + X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 y \end{aligned}$$

Հետևելով (Zellner (1986)) աշխատանքին՝ ենթադրում ենք, որ նախնական դիսպերսիան (prior variance) տրված է հետևյալ հավասարումով. $V_{0i}^{-1} = g_i X_{2i}' M_1 X_{2i}$: Հետևաբար Բայեսյան եղանակով գնահատված b_{1i} և b_{2i} պարամետրերը արժեքները համապատասխանաբար կլինեն.

$$\begin{aligned} b_{1i} &= (X_1' X_1)^{-1} X_1' (y - X_{2i} b_{2i}) \\ b_{2i} &= \frac{1}{1 + g_i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 y \end{aligned}$$

Այժմ հաշվարկենք b_{1i} և b_{2i} պարամետրերի դիսպերսիաները: Կարելի է ցույց տալ, որ $\varepsilon = A_i y$: Իրոք, ունենք հետևյալ արտահայտությունը.

$$\begin{aligned} A_i &= M_1 - \frac{1}{1 + g} M_1 X_{2i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1, \text{ հետևաբար} \\ A_i y &= (M_1 - \frac{1}{1 + g} M_1 X_{2i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1) y = M_1 y - \frac{1}{1 + g} M_1 X_{2i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 y = \\ &= (I - X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1') y - \frac{1}{1 + g} (I - X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1') X_{2i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 y = \\ &= y - X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' y - \frac{1}{1 + g} X_{2i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 y + \\ &= \frac{1}{1 + g} X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_{2i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 y = y - \\ &= X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' (y - \frac{1}{1 + g} X_{2i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 y) - \frac{1}{1 + g} X_{2i} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 y = \\ &= y - X_1 b_{1i} - X_{2i} b_{2i} = \varepsilon \end{aligned}$$

Այժմ կարող ենք հաշվարկել b_{1i} և b_{2i} պարամետրերի դիսպերսիաները:

$$\begin{aligned} b_{2i} &= \frac{1}{1 + g} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 (X_1 \beta_{1i} + X_2 \beta_{2i} + \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{1 + g} \beta_{2i} + \frac{1}{1 + g} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 \varepsilon \\ \text{var}(b_{2i} - \frac{1}{1 + g} \beta_{2i}) &= \text{var}(\frac{1}{1 + g} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} X_{2i}' M_1 \varepsilon) = \frac{\varepsilon' \varepsilon}{1 + g} (X_{2i}' M_1 X_{2i})^{-1} \end{aligned}$$

Նույն տրամաբանությամբ կարող ենք հաշվարկել b_{1i} դիսպերսիան:

$$\text{var}(b_{1i} - \beta_{1i}) = \varepsilon' \varepsilon (X_1' X_1)^{-1} + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_{2i} \text{var}(b_{2i}) X_{2i}' X_1 (X_1' X_1)^{-1}$$

**Գծային ռեգրեսիոն հավասարման պարամետրերի գնահատման
Բայեսյան բանաձևի դուրսբերման ալգորիթմը**

$$\begin{aligned} & (\beta - m)' H^{-1} (\beta - m) + h(y - X\beta)' (y - X\beta) = \\ & \beta' H^{-1} \beta - \beta' H^{-1} m - m' H^{-1} \beta + m' H^{-1} m + h y' y - y' h X \beta - h (X\beta)' y \\ & + h (X\beta)' (X\beta) = \beta' (H^{-1} + h(X'X)) \beta - 2\beta' (H^{-1} + h(X'X))^{-1} (H^{-1} m + hX'y) + \\ & ((H^{-1} + h(X'X))^{-1} (H^{-1} m + hX'y))' (H^{-1} + h(X'X)) ((H^{-1} + h(X'X))^{-1} (H^{-1} m + hX'y)) + h y' y \\ & - \beta' H^{-1} m - ((H^{-1} + h(X'X))^{-1} (H^{-1} m + hX'y))' (H^{-1} + h(X'X)) ((H^{-1} + h(X'X))^{-1} (H^{-1} m + hX'y)) = \\ & (\beta - (H^{-1} + h(X'X))^{-1} (H^{-1} m + hX'y))' (H^{-1} + h(X'X)) (\beta - (H^{-1} + h(X'X))^{-1} (H^{-1} m + hX'y)) + Q \end{aligned}$$

ՀՀ տնտեսության իրական հատվածի ցուցանիշներ

1. Իրական ՀՆԱ աճ – լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
2. Վերջնական սպառման իրական աճ - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
3. Համախառն ներդրումների իրական աճ - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
4. Իրական արտահանման աճ - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
5. Իրական ներմուծման աճ - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
6. Արդյունաբերության իրական թողարկում - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
7. Գյուղատնտեսության իրական թողարկում - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
8. Շինարարության իրական թողարկում - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
9. Ծառայությունների իրական թողարկում - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,

Սպառողական գներ և փոխարժեքներ

1. Սպառողական գների ինդեքս (CPI) - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
2. Պարենային ապրանքների գների ինդեքս - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
3. Ոչ պարենային ապրանքների գների ինդեքս – լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները,
4. Ծառայությունների գների ինդեքս - լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները,
5. Հացահատիկի գների ինդեքս - լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները,
6. Վառելիքի գների ինդեքս - լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները,
7. Ներմուծված պարենային ապրանքների գների ինդեքս - լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները,
8. Ներմուծված ոչ պարենային ապրանքների գների ինդեքս - լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները,
9. Տեղական պարենային ապրանքների գների ինդեքս - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,

10. Ադմինիստրատիվ կարգավորվող գների ինդեքս - լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները,
11. ՀՀ դրամ/ԱՄՆ դոլար փոխարժեք - լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները,
12. ՀՀ դրամ/եվրո փոխարժեք - լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները,
13. ՀՀ դրամ/ռուսական ռուբլի - լոգարիթմվել է և հաշվարկվել են առաջին կարգի տարբերությունները:

Ֆինանսական ցուցանիշներ

1. Կանխիկ դրամ - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
2. Փողի բազա – լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
3. Փողի նեղ զանգված - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
4. Փողի լայն զանգված - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
5. Ընդհանուրն ավանդները բանկային համակարգում - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
6. Բանկային համակարգի ընդհանուր վարկերը - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
7. Ձեռնարկությունների տրված վարկերը - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
8. Տնային տնտեսություններին տրված վարկերը - լոգարիթմած, սեզոնային հարթեցված և հաշվարկված են առաջին կարգի տարբերությունները,
9. i^d - բանկային համակարգում 360-օրյա դրամային ավանդների տոկոսադրույքը (հաշվարկված են տարբերությունները),
10. i^f - բանկային համակարգում 360-օրյա արտարժույթային ավանդների տոկոսադրույքը (հաշվարկված են տարբերությունները),
11. i^{id} - տրամադրվող դրամային վարկերի տոկոսադրույքը (հաշվարկված են տարբերությունները),
12. i^{fd} - տրամադրվող դոլարային վարկերի տոկոսադրույքը (հաշվարկված են տարբերությունները),
13. CB^{inter} - Կենտրոնական բանկի վերաֆինանսավորման տոկոսադրույքը (հաշվարկված են տարբերությունները):

Միջազգային ցուցանիշներ

1. GDP^{EU} – Եվրոմիության ՀՆԱ-ի իրական աճի ինդեքսը (լոգարիթմած և հաշվարկված են տարբերությունները),
2. GDP^{USA} - ԱՄՆ ՀՆԱ-ի իրական աճի ինդեքսը (լոգարիթմած և հաշվարկված են տարբերությունները),
3. CPI^{EU} - Եվրոմիության սպառողական գների ինդեքսը (լոգարիթմած և հաշվարկված են տարբերությունները),
4. CPI^{USA} - ԱՄՆ սպառողական գների ինդեքսը (լոգարիթմած և հաշվարկված են տարբերությունները),
5. Հացահատիկի գների ինդեքս - լոգարիթմած և հաշվարկված են տարբերությունները,
6. Գազի համաշխարհային գների ինդեքս - լոգարիթմած և հաշվարկված են տարբերությունները,
7. Վառելիքի գների ինդեքս - լոգարիթմած և հաշվարկված են տարբերությունները: